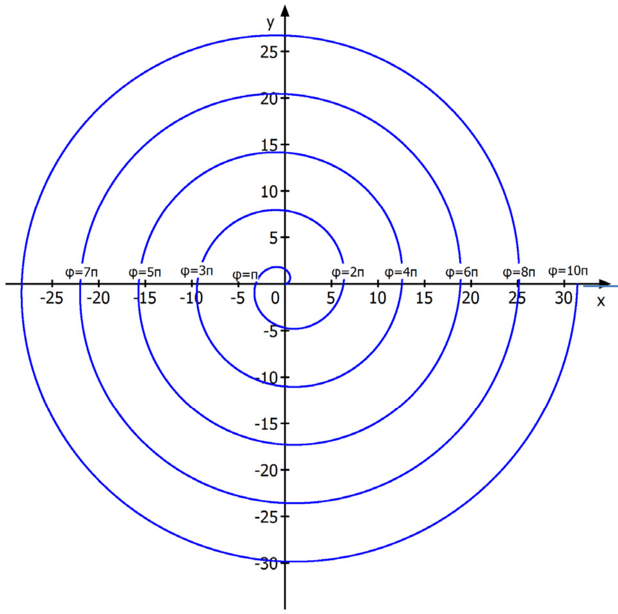


Spiralen

Text Nr. 54135

Stand 9. März 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

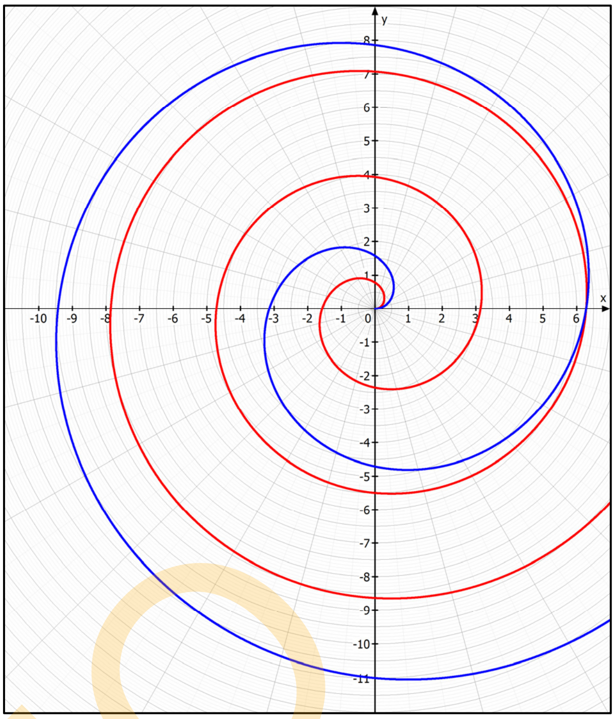
Vorwort

Es gibt eine ganze Reihe von spiralähnlichen Kurven. Einige davon habe ich für diesen Text ausgewählt.
Die Methoden für die Berechnungen werden im Text 54011 Differentialgeometrie besprochen.
Die Integralberechnungen sind teilweise sehr schwer und für Studenten sehr wichtig.

Inhalt

1 Archimedische Spirale

1.1 Gleichungen



Ihre Gleichung lautet: $r = a \cdot \varphi$

mit $a > 0$ und $\varphi \geq 0$

Die Abbildung zeigt zwei solche Spiralen, für a = 0,5 (rot) und a = 1 (blau).

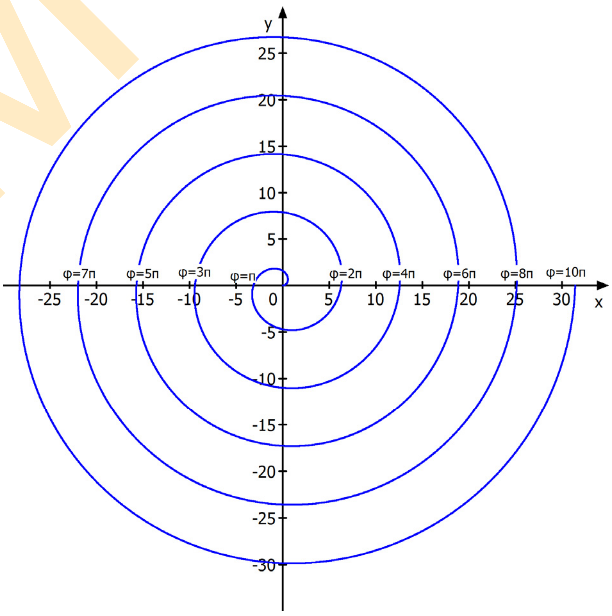
$r = 0{,}5 \cdot \varphi$ und $r = \varphi$

Der **Definitionsbereich** ist $\varphi \in [0\,;\infty[$.

Für das Intervall $[0\,;2\pi[$ erzielt man einen Umlauf von der x-Achse bis wieder zu ihr.

Information: Der Abstand zwischen zwei Windungen ist konstant $2\pi a$, hier also genau π .

Die untere Abbildung hat einen größeren Maßstab, sodass man mehr Umläufe sehen kann.



Die Archimedische Spirale hat auch eine Parametergleichung:

$$x(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) = a \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi)$$
$$y(\varphi) = r \cdot \sin(\varphi) = a \cdot \varphi \cdot \sin(\varphi)$$

oder so: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} at \cdot \cos(t) \\ at \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$

Wer zuerst den Text über Kurven in Parameterdarstellung gelesen hat, ist vielleicht etwas irritiert, denn dort wurde der Parameter t statt φ verwendet.

Jetzt sind x und y selbst Funktionen von t.

1.2 Waagrechte und senkrechte Tangenten, Extrempunkte

Ableitung: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \cdot \cos(t) \\ \frac{1}{2}t \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 \cdot \cos(t) - t \cdot \sin(t)) \\ \frac{1}{2}(1 \cdot \sin(t) + t \cdot \cos(t)) \end{pmatrix}$

Define $x(t)=\begin{bmatrix} \frac{t}{2}\cdot\cos(t) & \frac{t}{2}\cdot\sin(t)\end{bmatrix}$	*Fertig*

solve(sin(t)+t· cos(t)=0,t)|0≤t≤4· π	
	t=0. or t=2.02876 or t=4.91318 or t=7.97867 or t=11.0855
x(2.02876)	[-0.44848 0.909853]
x(4.91318)	[0.489953 -2.40723]
x(7.97867)	[-0.496136 3.95836]
x(11.0855)	[0.497764 -5.52035]

Bedingung für waagerechte Tangente:

$$\dot{y}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(t) + t \cdot \cos(t) = 0$$

In der von TI Nspire erstellten Tabelle rechts erkennt man außer dem Ursprung noch 4 weitere Punkte im Intervall $t \in [0; 4\pi]$.

Bedingung für senkrechte Tangenten:

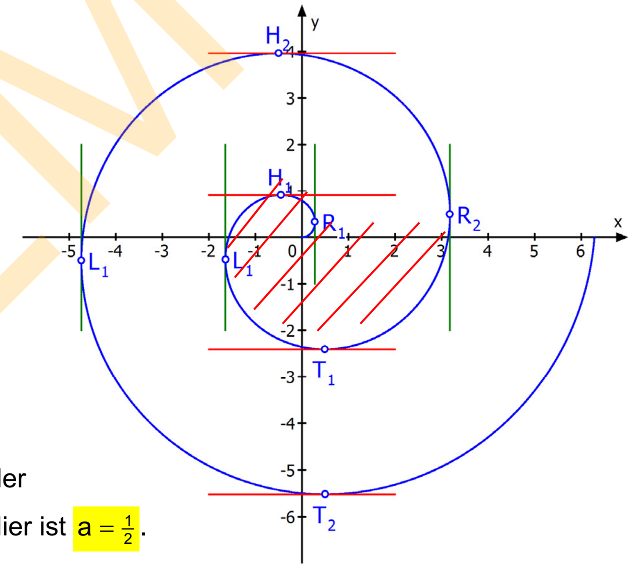
$$\dot{x}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t) - t \cdot \sin(t) = 0$$

solve(cos(t)−t· sin(t)=0,t)|0≤t≤4· π	
	t=0.860334 or t=3.42562 or t=6.4373 or t=9.52933
x(0.860334)	[0.280548 0.326093]
x(3.42562)	[-1.64419 -0.47997]
x(6.4373)	[3.1805 0.49408]
x(9.52933)	[-4.73865 -0.497248]

Hier gibt es für das Intervall $t \in [0; 4\pi]$ genau vier Punkte.

Die Abbildung zeigt 4 waagrechte und 4 senkrechte Tangenten in den berechneten Berührpunkten.

Man könnte noch überprüfen, ob ein Hochpunkt ($\ddot{y}(t) < 0$) oder ein Tiefpunkt ($\ddot{y}(t) > 0$) vorliegt, oder ein Rechtspunkt (Maximum für x, wenn $\ddot{x}(t) < 0$ ist) oder ein Linkspunkt (Minimum für x, wenn $\ddot{x}(t) > 0$ ist).



Wie liegen die Extrempunkte der Kurve?

Da muss man zunächst einmal feststellen, dass der t-Wert der Extrempunkte von a unabhängig ist. Hier ist $a = \frac{1}{2}$.

Man könnte dann vermuten, dass die Extrempunkte im „Abstand" $\Delta t = 2\pi$ auftreten.

Es sei t_1 eine Lösung der Gleichung $\dot{y}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(t_1) + t_1 \cdot \cos(t_1) = 0$.

Ist dann $t_1 + 2\pi$ auch eine Lösung dieser Gleichung: $\sin(t) + t \cdot \cos(t) = 0$? Probe durch Einsetzen:

$$\sin(t_1 + 2\pi) + (t_1 + 2\pi) \cdot \cos(t_1 + 2\pi) = \sin(t_1) + (t_1 + 2\pi) \cdot \cos(t_1) = \underbrace{\sin(t_1) + t_1 \cdot \cos(t_1)}_{=0} + 2\pi \cdot \underbrace{\cos(t_1)}_{\neq 0} \neq 0$$

Das ist also nicht der Fall.

1.3 Schnittpunkte der Spirale mit der x-Achse?

Bedingung: $y(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad at\cdot\sin(t)=0$

1. Lösung: $t_1 = 0$, 2. Lösung $\sin(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=n\cdot\pi \quad (n\in\mathbb{N}_0)$

Also ist der Ursprung doppelte Nullstelle (Berührpunkt mit der x-Achse).

Dann weiter alle Punkte mit t als Vielfachem von π.

Das ergibt diese x-Koordinaten: $x(n\cdot\pi)=a\cdot n\pi\cdot\cos(n\pi)$

Ist n ungerade, dann ist $\cos(n\pi)=-1$, ist n gerade: $\cos(n\pi)=1$

Also $x_N \in \{0\,;-a\pi\,;+2a\pi;\ -3a\pi:\ 4a\pi;\ \text{usw.}\}$

1.4 Steigungswinkel im ersten Schnittpunkt mit der x-Achse rechts vom Ursprung?

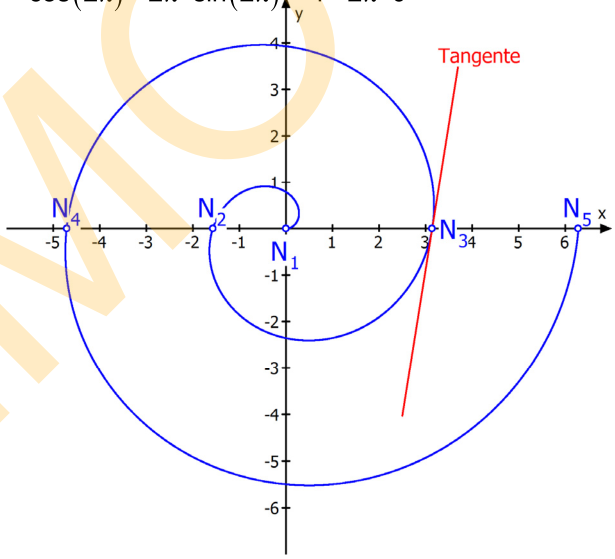
Für die Tangentensteigung gilt:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot y(t)}{\dot x(t)}=\frac{\sin(t)+t\cdot\cos(t)}{\cos(t)-t\cdot\sin(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(t=2\pi)=\frac{\sin(2\pi)+2\pi\cdot\cos(2\pi)}{\cos(2\pi)-2\pi\cdot\sin(2\pi)}=\frac{0+2\pi\cdot 1}{1-2\pi\cdot 0}=2\pi$$

$$\tan\gamma=2\pi \quad \Rightarrow \quad \gamma=\arctan(2\pi)\approx 80{,}96^{\circ}$$

Gleichung der Tangente in $N_3(\pi\,|\,0)$**:**

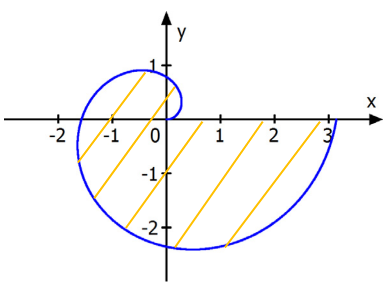
$$y-0=2\pi\cdot(x-\pi) \quad \Leftrightarrow \quad y=2\pi\cdot x-2\pi^2$$



1.5 Sektorenfläche, welche die positive x-Achse mit der Spirale nach 1 Umlauf begrenzt?

Für das Intervall $\varphi\in[0\,;2\pi]$ macht die Kurve einen Umlauf.

Die vom Radius dabei überstrichene (schraffierte)Fläche hat den Inhalt



$$\boxed{F=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{1}{2}\varphi\right)^2 d\varphi}=\tfrac{1}{8}\int_0^{2\pi}\varphi^2 d\varphi=\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{\varphi^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{8}\cdot\frac{8\pi^3}{3}=\frac{\pi^3}{3}\ \text{(FE)}$$

Formel siehe Text 54011 Seite 48/50 ???

1.6 Länge des dargestellten Bogens?

$\boxed{s=\int_0^{2\pi}\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi}$ mit $r(\varphi)=a\cdot\varphi \;\Rightarrow\; r'(\varphi)=a$

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\tfrac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi \quad \text{für } a=\tfrac{1}{2}.$$

Der Formelsammlung wird entnommen: $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\cdot\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}$

Also $\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{ar\,sinh}(x)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}$

Auf der nächsten Seite zeige ich, wie man dieses Integral berechnet!

$$s=\tfrac{1}{4}\cdot\left[\operatorname{ar\,sinh}(\varphi)+\varphi\cdot\sqrt{\varphi^2+1}\right]_0^{2\pi}\approx 10{,}63\ \text{LE}$$

```
sinh⁻¹(0)
                                   0
sinh⁻¹(2π)
                         2.537297501
1/4*(sinh⁻¹(2π)-sinh⁻¹(0)+2π√(4π²+1))
                         10.62814707
```

Wissen:

Hier tritt als Stammfunktion von $\sqrt{x^2+a^2}$ eine Funktion auf, die arsinh heißt, gelesen „Area sinus hyperbolicus". Sie ist die Umkehrfunktion der Funktion $y=\sinh(x)$, die „Sinus hyperbolicus" heißt. Und diese wiederum ist definiert durch diese Gleichung: $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Daneben gibt es noch die Funktionen cosh und tanh. Und weil zwischen ihnen Beziehungen bestehen, die an sin, cos und tan erinnern, tragen Sie diese Namen.

Siehe dazu auch die folgende Seite.

1.7 Einschub: Berechnung von $\int \sqrt{x^2+1}\ dx$

Vorkenntnisse:

Man benötigt die hyperbolische Funktion **sinh(x)** („sinus hyperbolicus")

Zusammen mit der „Schwesterfunktion" cosh(x) gilt diese Formel

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \sinh^2(t) + 1 = \cos^2(t) \qquad (1)$$

Also ist $\cosh(t) = \sqrt{\sinh^2(t)+1}$ (2)

Ihre Ableitungen sind: $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = \sinh(x)$ (3)

Die Umkehrfunktion zu sinh(x) ist **arsinh(x)** (Area Sinus hyperbolicus).

Für diese Funktion gibt es auch einen logarithmischen Funktionsterm:

$$\mathrm{ar}\sinh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad (4)$$

Nun zur Integration:

Wenn man sich die Wurzel ansieht und mit (2) vergleicht, dann erkennt man, dass man eine **Substitution** mit $x = \sinh(t)$ versuchen könnte $\quad dy = \sinh'(t)\cdot dt = \cosh(t)\cdot dt$

$$\int \sqrt{x^2+1}\ dx = \int \sqrt{\sinh^2(t)+1}\cdot\cosh(t)\,dt = \int \cosh(t)\cdot\cosh(t)\,dt$$

Partielle Berechnung des letzten Integrals: $\boxed{\int u'\cdot v\ dt = u\cdot v - \int u\cdot v'\ dt}$

$u' = \cosh(t) \Rightarrow u = \sinh(t)$

$v = \cosh(t) \Rightarrow v' = \sinh(t)$

$$\int \cosh(t)\cdot\cosh(t)\,dt = \sinh(t)\cdot\cosh(t) - \int \sinh^2(t)\,dt$$

Ersetzen nach (1): $\sinh^2(t) + 1 = \cos^2(t)$

$$\int \cosh(t)\cdot\cosh(t)\,dt = \sinh(t)\cdot\cosh(t) - \int\left(\cosh^2(t) - 1\right)dt$$

$$\int \cosh(t)\cdot\cosh(t)\,dt = \sinh(t)\cdot\cosh(t) + t - \int\left(\cosh^2(t)\right)dt$$

Jetzt behandelt man diese Zeile **wie eine Gleichung** und addiert $\quad | + \int\left(\cosh^2(t)\right)dt$

$$2\cdot\int \cosh(t)\cdot\cosh(t)\,dt = \sinh(t)\cdot\cosh(t) + t \qquad | :2$$

$$\int \cosh(t)\cdot\cosh(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) + \tfrac{1}{2}t\,.$$

Das heißt doch aber:

$$\int \sqrt{x^2+1}\ dx = \tfrac{1}{2}\cdot\sinh(t)\cdot\cosh(t) + \tfrac{1}{2}t$$

Rücksubstitution: $\sinh(t) = x$ und $t = \mathrm{ar}\sinh(x)$ (Umkehrung).

$\cosh(t) = \sqrt{\sinh^2(t)+1} = \sqrt{x^2+1}$

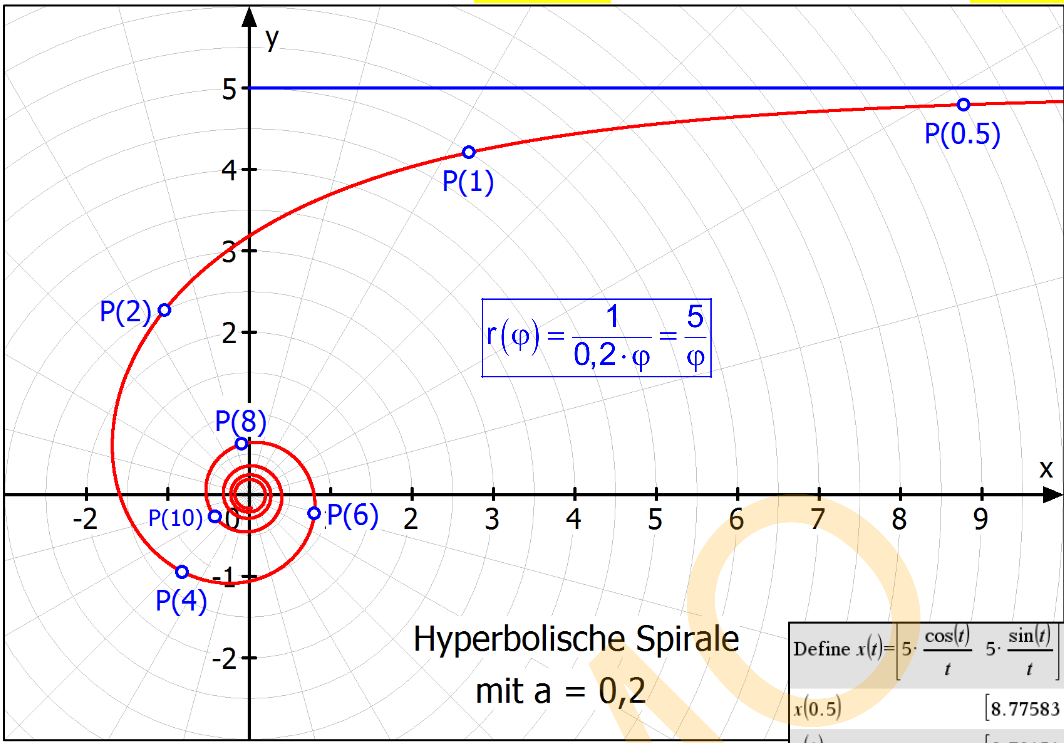
Ergebnis:

$$\int \sqrt{x^2+1}\ dx = \tfrac{1}{2}\cdot x\sqrt{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{ar}\sinh(x)$$

bzw. unter Beachtung von (4):

$$\int \sqrt{x^2+1}\ dx = \tfrac{1}{2}\cdot x\sqrt{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

2 Hyperbolische Spirale: $r(\varphi) = \frac{1}{a \cdot \varphi}$. Oft wird sie so angegeben: $r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$



Define $x(t)=\left[5 \cdot \frac{\cos(t)}{t} \quad 5 \cdot \frac{\sin(t)}{t}\right]$	*Fertig*
$x(0.5)$	[8.77583 4.79426]
$x(1)$	[2.70151 4.20735]
$x(2)$	[-1.04037 2.27324]
$x(4)$	[-0.817055 -0.946003]
$x(6)$	[0.800142 -0.232846]
$x(8)$	[-0.090938 0.618349]
$x(10)$	[-0.419536 -0.272011]

Berechnung von Punkten: $x(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{a \cdot \varphi}$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{a \cdot \varphi}$$

Rechts der Screenshot meines CAS-Rechners TI Nspire.

Die Vektorfunktion hat 7 Punkte berechnet, die im Schaubild eingetragen sind.

Vermutung: Die Kurve hat für $\varphi \to 0$ bzw. $x \to \infty$ die waagerechte Asymptote y = 5.

Beweis:

Zuerst braucht man $\lim\limits_{\varphi \to 0} x(\varphi) = \lim\limits_{\varphi \to 0} 5 \cdot \frac{\cos(\varphi)}{\varphi} = \infty$ denn Zähler $\to 1$, und Nenner $\to 0$.

Dann dieser Grenzwert $\lim\limits_{\varphi \to 0} y(\varphi) = 5 \cdot \lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{\sin(\varphi)}{\varphi} \underset{\text{de L'Hospital}}{\overset{\text{Regel von}}{=}} 5 \cdot \boxed{\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{\cos \varphi}{1}} = 5 \cdot \boxed{1} = 5$,

wobei die **Regel von de L'Hospital** angewandt worden ist:

WISSEN: Diese Voraussetzung ist erfüllt: Zähler $\to 0$ und Nenner $\to 0$.
Dann ändert sich der Grenzwert nicht, wenn man Zähler und Nenner getrennt ableitet, also keine Quotientenregel.

Wir haben also gezeigt: Für $\varphi \to 0$ geht $x(\varphi) \to \infty$ und $y(\varphi) \to 5$

Allgemein gilt: Die hyperbolische Spirale $r(\varphi) = \frac{1}{a \cdot \varphi}$ hat für $\varphi \to 0$ die waagerechte Asymptote: $y = \frac{1}{a}$.

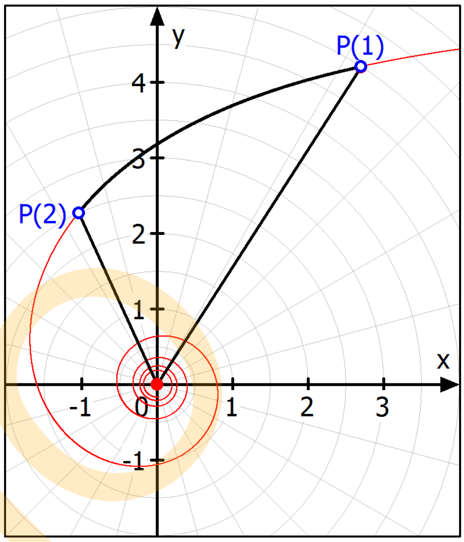
Die Kurve erreicht den Ursprung O nicht.

Denn dazu muss $\varphi \to \infty$ gehen:

$$\lim_{\varphi\to\infty} x(\varphi) = \lim_{\varphi\to\infty} \frac{\cos(\varphi)}{a\cdot\varphi} = 0,$$

denn der Zähler schwankt zwischen -1 und 1, der Nennert geht jedoch gegen Unendlich. Analog folgt:

$$\lim_{\varphi\to\infty} y(\varphi) = \lim_{\varphi\to\infty} \frac{\sin(\varphi)}{a\cdot\varphi} = 0$$



Berechnung der Fläche eines Kurvensegments

mit der Formel (Text 54011):

$$\boxed{F = \tfrac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi}$$

$$F = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{5}{\varphi}\right)^2 d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_1^2 25\cdot\varphi^{-2}d\varphi = 12{,}5\cdot\left[\frac{\varphi^{-1}}{-1}\right]_1^2 = -12{,}5\cdot\left[\frac{1}{\varphi}\right]_1^2 = -12{,}5\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right) = 6{,}25$$

teilen diese in ebensoviele gleiche Teilstrecken. Auf den Strahlen $Ob_1, Ob_2, \ldots$ tragen wir die Strecken $OD_1 = \frac{OA_1}{n}$, $OD_2 = 2\,\frac{OA_1}{n}$, $\ldots$ auf. Wir erhalten so die Punkte $D_1, D_2, D_3, \ldots$ der ersten Windung der Spirale. Die Punkte $E_1, E_2, E_3, \ldots$ der zweiten Windung erhalten wir, wenn wir auf der Verlängerung der Strecken $OD_1, OD_2, OD_3, \ldots$ die Strecken $D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3, \ldots$ auftragen, deren Länge gleich der Schrittweite OA_1 ist. Analog dazu erhalten wir die Punkte der folgenden Windungen.

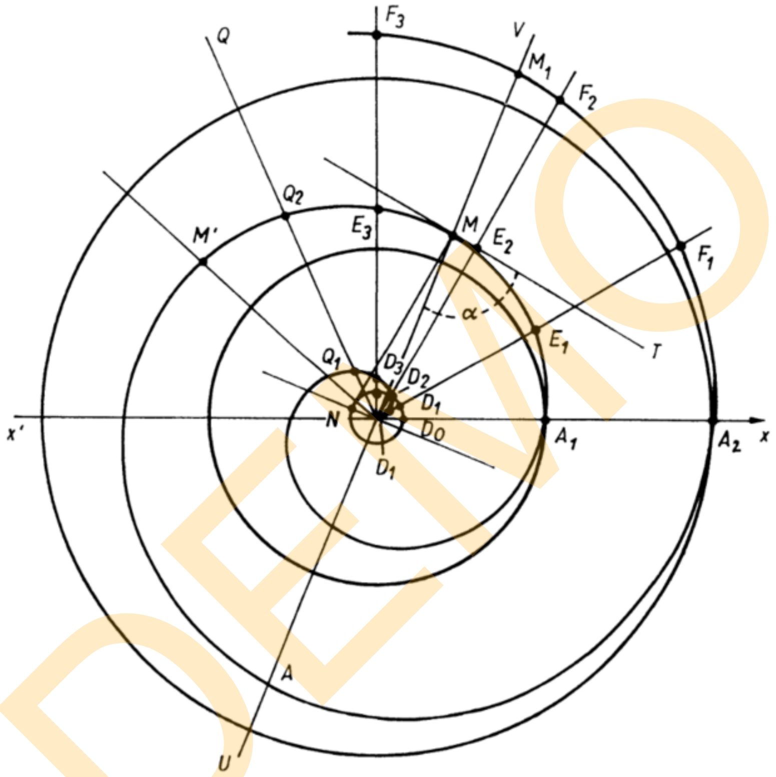


Abb. 471

2. Besonderheiten der Form. Ein beliebiger Strahl OQ, der vom Pol O ausgeht, hat neben O mit der Spirale noch unendlich viele Punkte $Q_1, Q_2, \ldots$ gemeinsam. Zwei aufeinander folgende Punkte Q_i, Q_{i+1} haben einen Abstand, der gleich der Schrittweite $a(= 2k\pi)$ ist. Im Ursprung O dient die Achse OX als Tangente. Die Tangente MT in einem beliebigen Punkt M der Spirale erhält man aus der Geraden MO, wenn man diese um den Winkel $OMT = \alpha$ dreht.

Für α gilt

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OM}{k} = \frac{\varrho}{k} = \varphi.$$

3. Eigenschaften der Normalen. Die Normale MN durch den Punkt M der Archimedischen Spirale mit der Schrittweite a schneidet die Gerade ON, die senkrecht auf den Polarradius OM steht, im Punkt N, der von O den Abstand $ON = \frac{a}{2\pi}$ $(= |k|)$.

4. Der Flächeninhalt S des Sektors MOM' (wenn sich die Polarwinkel der Punkte M und M' um nicht mehr als 2π unterscheiden):

$$S = \frac{1}{6}\,\omega(\varrho^2 + \varrho\varrho' + \varrho'^2). \tag{1}$$

Dabei gilt $\varrho = OM$, $\varrho' = OM'$, $\omega = \sphericalangle MOM'$.

5. Der Flächeninhalt einer Windung. Formel (1) liefert für $\varrho = 0$, $\varrho' = a$, $\omega = 2\pi$ den Inhalt S_1 der Figur $OD_2D_3Q_1A_1O$ (Abb. 471), die von der ersten Schleife der Spirale und der Strecke OA_1 begrenzt wird:

$$S_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 = \frac{1}{3}S_1'. \tag{2}$$

Dabei ist S_1' der Inhalt des Kreises mit dem Radius OA_1.
Der Inhalt S_2 der Figur $A_1E_3HA_2A_1$, die von der zweiten Schleife und der Strecke A_2A_1 begrenzt wird ($\varrho = a$, $\varrho' = 2a$, $\omega = 2\pi$) lautet

$$S_2 = \frac{7}{3}\pi a^2 = \frac{7}{12}S_2'. \tag{3}$$

Dabei ist S_2' der Inhalt des Kreises mit dem Radius OA_2.
Im allgemeinen gilt für den Inhalt S_n der von der n-ten Schleife und der Strecke OA_0 begrenzten Figur

$$S_n = \frac{n^3 - (n-1)^3}{3}\pi a^2 = \frac{n^3 - (n-1)^3}{3n^2}S_n'. \tag{4}$$

Dabei bedeutet S_n' wieder den Inhalt des Kreises mit dem Radius OA_n.

6. Der Flächeninhalt der Ringe. Als *ersten Ring* der Archimedischen Spirale bezeichnen wir eine Figur, die durch die Bewegung des Polarstrahlabschnitts zwischen der ersten und der zweiten Windung bei einer Drehung aus der Anfangslage um 360° gebildet wird. Der Umfang dieser Figur wird gebildet durch die Strecke OA_1, der ersten Windung OQ_1A_1, der Strecke A_1A_2 und der zweiten Windung $A_2HQ_2A_1$.
Der *zweite Ring* wird auf analoge Weise durch den Polarstrahlabschnitt zwischen der zweiten und der dritten Windung erzeugt. Er wird begrenzt durch: 1) die Strecke A_2A_1, 2) die zweite Windung, 3) die Strecke A_2A_3, 4) die dritte Windung.

Auf dieselbe Weise definiert man den dritten, vierten, usw. Ring.
Den Flächeninhalt F_n des n-ten Ringes erhält man durch

$$F_n = S_{n+1} - S_n = 6nS_1.$$

$S_1 = \frac{\pi a^2}{3}$ bedeutet hier den Inhalt der ersten Windung.

7. Die Bogenlänge l des Bogens OM:

$$l = \frac{k}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\varrho\sqrt{\varrho^2+k^2}}{k} + k\ln\frac{\varrho+\sqrt{\varrho^2+k^2}}{k}\right]$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\operatorname{tg}\alpha \operatorname{sc}\alpha + \ln(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sc}\alpha)\right].$$

Dabei bedeutet α den spitzen Winkel zwischen der Tangente MT (Abb. 471) und dem Polarradius OM.

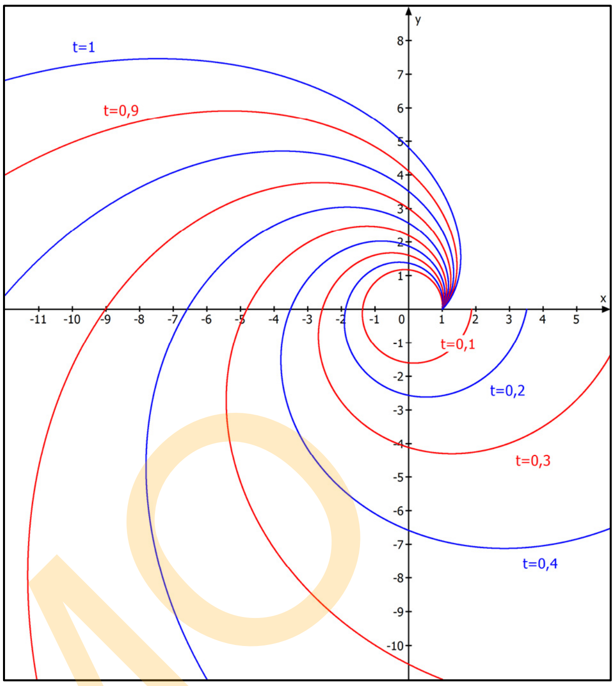
8. Krümmungsradius:

$$R = \frac{(\varrho^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2+2k^2} = k\,\frac{(\varphi^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2+2} = k\,\frac{(\operatorname{tg}^2\alpha+1)^{\frac{3}{2}}}{\operatorname{sc}^2\alpha+1}.$$

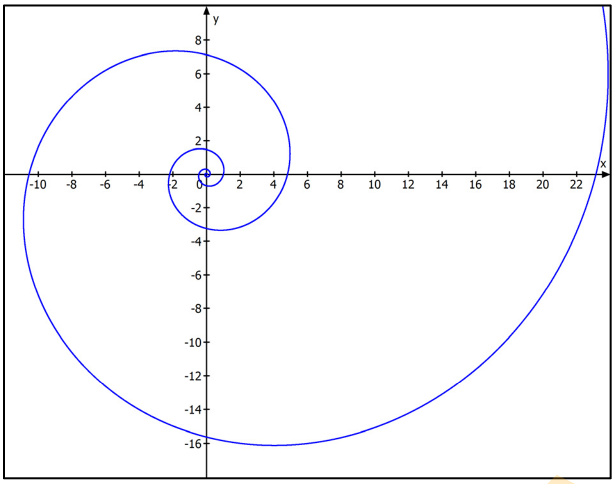
Im Ursprung gilt $R_0 = \frac{k}{2}$.

3. Logarithmische Spirale: $r(\varphi) = a \cdot e^{k \cdot \varphi}$ mit $a,k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Die rechte Abbildung zeigt eine Schar logarithmischer Spiralen, und zwar für die Kurvenparameter $t \in \{0{,}1 ; 0{,}2 ; ... ; 1\}$ (statt k) und zwar für das Intervall $\varphi \in [0 ; 2\pi]$ mit a = 1.



Unten die Spirale $r(\varphi) = e^{\varphi/4}$ für $\varphi \in [-4\pi ; 4{,}1\,\pi]$.



Man kann dafür auch diese **Parameterdarstellung** angeben:

$$x(t) = ae^{k \cdot \varphi} \cdot \cos(\varphi)$$
$$y(t) = ae^{k \cdot \varphi} \cdot \sin(\varphi)$$

Die *Name* „logarithmische Spirale" kommt aus der Berechnung des Winkels aus dem Radius:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(ae^{k\varphi}\right)^2 \cdot \cos^2(\varphi) + \left(ae^{k\varphi}\right)^2 \cdot \sin^2(\varphi)} = \sqrt{\left(ae^{k\varphi}\right)^2 \cdot \left[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right]} = a \cdot e^{k\varphi}$$

$$\frac{r}{a} = e^{k \cdot \varphi} \quad \Rightarrow \quad k \cdot \varphi = \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

Zugleich hat man mit der Gleichung $r = a \cdot e^{k \cdot \varphi}$ die Gleichung in P**olarkoordinaten**.

Eigenschaft:

Mit jeder Windung wächst der Radius um einen konstanten Faktor:

$$r(\varphi + 2\pi) = a \cdot e^{k(\varphi + 2\pi)} = a \cdot e^{k \cdot 2\pi} \cdot e^{k\varphi} = a \cdot \left(e^{2\pi}\right)^k \cdot e^{k\varphi} = \left(e^{2\pi}\right)^k \cdot r(\varphi)$$

Also: $r(\varphi + 2\pi) = \left(e^{2\pi}\right)^k \cdot r(\varphi)$

Dabei ist $e^{2\pi} \approx 535{,}5$ ein so großer Faktor, da mit k noch potenziert wird, dass die Spirale schnell „in die Weite" geht.

Folgerung: Will man möglichst anschauliche logarithmische Spiralen erzeugen, sollte k sehr viel kleiner als 1 sein.

Man erkennt dies an der rechten oberen Abbildung.

Diese Eigenschaft kann man auch so interpretieren:

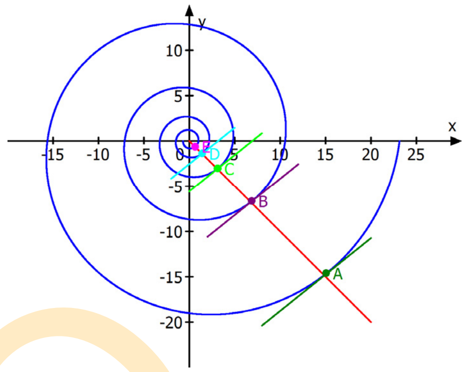
Die logarithmische Spirale kann durch eine zentrische Streckung auf sich selbst abgebildet werden.

Beweis: Vergrößert man φ um ein Vielfaches von 2π, dann kommt man zu $\varphi + k \cdot 2\pi$.

Dazu gehört dann der Radius $r(\varphi + k \cdot 2\pi) = e^{t\cdot(\varphi + k\cdot 2\pi)} = e^{t\cdot\varphi + t\cdot k\cdot 2\pi} = e^{t\cdot\varphi} \cdot e^{t\cdot k\cdot 2\pi}$

Also erhält man $r(\varphi + k \cdot 2\pi) = e^{t\cdot k\cdot 2\pi} \cdot r(\varphi)$

Der Streckfaktor ist somit $e^{t\cdot k\cdot 2\pi}$.



Die Abbildung zeigt Streckungen in Richtung y = -x.

$\overline{OC} = c \cdot \overline{OD}$ und $\overline{OB} = c \cdot \overline{OC}$, $\overline{OA} = c \cdot \overline{OB}$

mit einem Streckfaktor c.

„Steigung“ der logarithmischen Spirale:

Darunter versteht man den Faktor k. Man kann k so berechnen:

Aus $r(\varphi) = a \cdot e^{k\cdot\varphi}$ folgt durch Ableiten: $r'(\varphi) = a \cdot e^{k\cdot\varphi} \cdot k$

Berechnung der Bogenlänge für einen Bogen dieser Kurve: $s=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,d\varphi$

Zuerst muss man die Ableitungen mit der Produktregel berechnen:

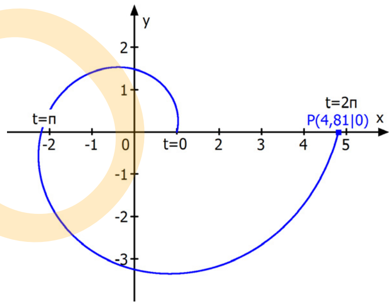
$$\dot{x}(t)=t\cdot e^{t\cdot\varphi}\cdot\cos(\varphi)-e^{t\cdot\varphi}\cdot\sin(\varphi)$$
$$\dot{y}(\varphi)=t\cdot e^{t\cdot\varphi}\cdot\sin(\varphi)+e^{t\cdot\varphi}\cdot\cos(\varphi)$$

$$s=\int_0^\alpha\sqrt{e^{2t\cdot\varphi}\left(t\cdot\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\right)^2+e^{2t\cdot\varphi}\cdot\left(t\cdot\sin(\varphi)+\cos(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$$

$$s=\int_0^\alpha\sqrt{e^{2t\cdot\varphi}\left(t^2\cdot\cos^2(\varphi)-\cancel{2t\sin(\varphi)\cos(\varphi)}+\sin^2(\varphi)+t^2\sin^2(\varphi)+\cancel{2t\sin(\varphi)\cos(\varphi)}+\cos^2(\varphi)\right)}\,d\varphi$$

$$s=\int_0^\alpha\sqrt{e^{2t\cdot\varphi}\left(t^2\cdot\left(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\right)+\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)\right)}\,d\varphi=\int_0^\alpha\sqrt{e^{2t\cdot\varphi}\left(t^2+1\right)}\,d\varphi$$

$$s=\sqrt{t^2+1}\int_0^\alpha e^{t\varphi}d\varphi=\sqrt{t^2+2}\cdot\left[\frac{e^{t\cdot\varphi}}{t}\right]_0^\alpha=\frac{\sqrt{t^2+2}}{t}\cdot\left[e^{t\cdot\alpha}-1\right]$$

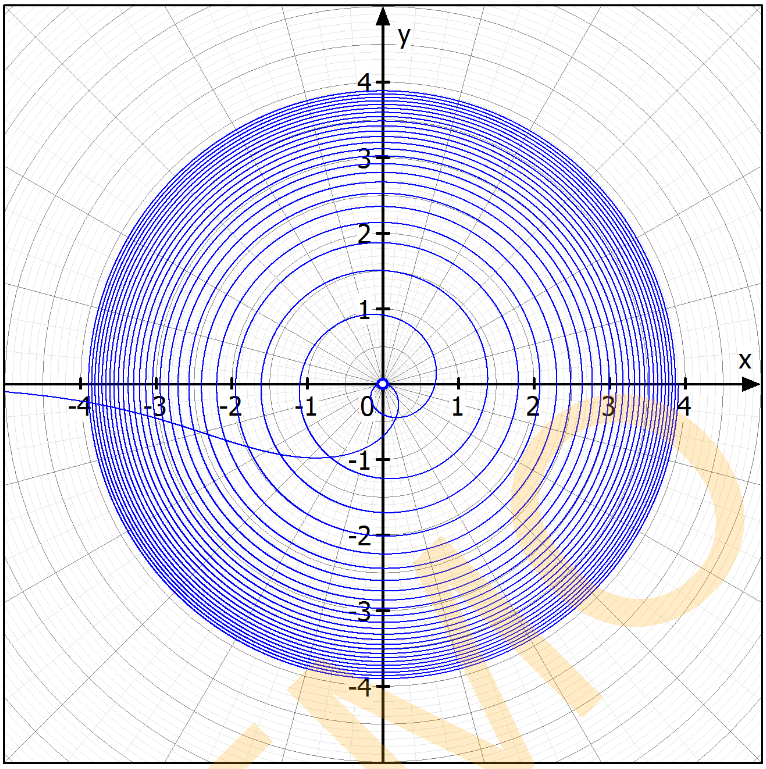


Beispiel: Der für $t=0{,}25=\frac{1}{4}$ dargestellter Bogen hat die Länge

$$s=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+2}}{\frac{1}{4}}\cdot\left[e^{2\pi/4}-1\right]\approx 21{,}89\ \ (LE)$$

Unter dem Namen logarithmische Spirale findet man auch diese Kurve: $r(\varphi) = \ln(a \cdot \varphi)$

Für die Abbildung ist $a = \frac{1}{\pi}$, also $r(\varphi) = \frac{\varphi}{\pi}$. Dargestellt ist das Intervall $0{,}01 \cdot \pi \le \varphi \le 50\pi$



Für $\varphi \to 0$ geht $\ln(\varphi) \to -\infty$, was zur waagrechten Asymptote nach links führt.

4. Andere Spiralen

Es gibt zahlreiche Kurven, die eine Spiralform aufweisen,

Beispiel 1: $r(\varphi,t) = \dfrac{4}{t+\varphi}$ für $\varphi \in [0\,;2\pi]$ und $t \geq 0$.

Zunächst transformiere ich in eine **Parameterdarstellung**:

$$x(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) = \frac{4\cdot\cos(\varphi)}{t+\varphi} \quad \text{und} \quad y(t) = r\cdot\sin(\varphi) = \frac{4\cdot\sin(\varphi)}{t+\varphi}$$

a) Schnittpunkte mit der x-Achse:

Bedingung: $y(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\varphi) = 0$.

Dies ergibt: $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi,\ \varphi_3 = 2\pi$.

x-Koordinaten: $x(\varphi = 0) = \dfrac{4}{t},\quad x(\varphi=\pi) = \dfrac{-4}{t+\pi},\quad x(\varphi = 2\pi) = \dfrac{4}{t+2\pi}$.

Ergebnis: $N_1\left(\dfrac{4}{t}\,|\,0\right)$ falls $t \neq 0$, $N_2\left(\dfrac{-4}{t+\pi}\,|\,0\right)$, $N_3\left(\dfrac{4}{t+2\pi}\,|\,0\right)$.

b) **Allgemeine Tangentensteigung**. Ableitungen mit der Quotientenregel:

$$x(\varphi) = 4\frac{\cos(\varphi)}{t+\varphi} \quad\Rightarrow\quad \dot{x}(\varphi) = 4\frac{-\sin(\varphi)\cdot(t+\varphi) - 1\cdot\cos(\varphi)}{(t+\varphi)^2} = -4\frac{\sin(\varphi)\cdot(t+\varphi)+\cos(\varphi)}{(t+\varphi)^2}$$

$$y(t) = 4\frac{\sin(\varphi)}{t+\varphi} \quad\Rightarrow\quad \dot{y}(\varphi) = 4\cdot\frac{\cos(\varphi)\cdot(t+\varphi)-\sin(\varphi)}{(t+\varphi)^2}$$

$$y' = \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)} = \frac{4\cdot\dfrac{\cos(\varphi)\cdot(t+\varphi)-\sin(\varphi)}{\cancel{(t+\varphi)^2}}}{-4\dfrac{\sin(\varphi)\cdot(t+\varphi)+\cos(\varphi)}{\cancel{(t+\varphi)^2}}} = -\frac{\cos(\varphi)\cdot(t+\varphi)-\sin(\varphi)}{\sin(\varphi)\cdot(t+\varphi)+\cos(\varphi)} = -\frac{(t+\varphi)-\tan(\varphi)}{\tan(\varphi)\cdot(t+\varphi)+1}$$

Entweder multipliziert man den Zählerbruch mit dem Kehrwert des Nennerbruchs, oder man erweitert den Doppelbruch mit $(t+\varphi)^2$, dann kann man beide Nennerklammern kürzen. Dann kürzte ich den Bruch noch durch $\cos(\varphi)$, was zu $\dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi)$ geführt hat.

c) **Tangenten an die Scharkurven im linken Schnittpunkt mit der x-Achse, also bei** $x = \pi$ **:**

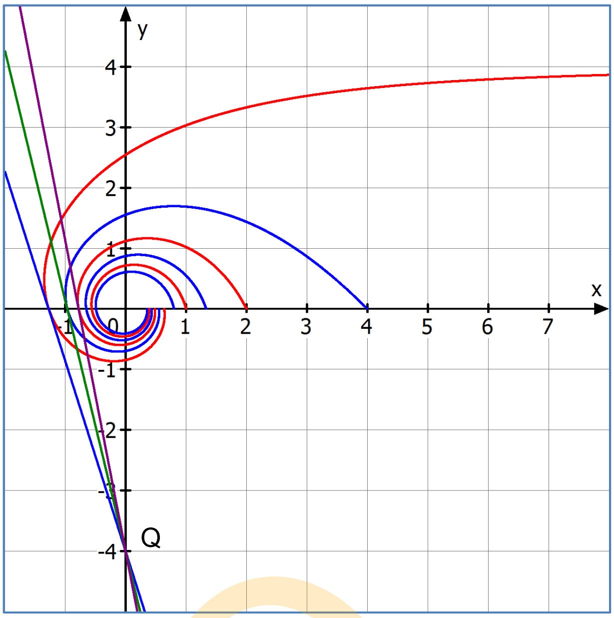
Tangentensteigung: $y'(\varphi=\pi) = -\dfrac{(t+\pi)-\tan(\pi)}{\tan(\pi)\cdot(t+\pi)+1} = -\dfrac{(t+\pi)}{1} = -(t+\pi)$

Tangentengleichung: $y - 0 = -(t+\pi)\cdot\left(x + \dfrac{4}{t+\pi}\right) \quad\Leftrightarrow\quad y = -(t+\pi)\cdot x - 4$

Beobachtung: Diese Tangentenschar geht durch den Punkt $Q(0\,|\,-4)$.
(Siehe Abb. auf der nächsten Seite.)

Die Abbildung zeigt die Kurvenschar.
Dargestellt sind die Kurven für
$t \in \{0;1;2;3;4;5\}$ und zwar für
$\varphi \in [0;2\pi]$.

Die Tangenten im linken Schnittpunkt mit der x-Achse gehen alle durch $Q(0\,|\,-4)$.



d) Die Kurve K_O hat die **waagerechte Asymptote** y = 4.

Beweis: $\lim\limits_{\varphi \to 0} x(\varphi) = \lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{4 \cdot \cos(\varphi)}{t+\varphi}$ "$= \infty$"

Aber $\lim\limits_{\varphi \to 0} y(\varphi) = \lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{4 \cdot \sin(\varphi)}{t+\varphi} = 4 \cdot \lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{\sin(\varphi)}{t+\varphi} = 4 \cdot 1 = 4$

Denn man sollte diesen Grenzwert kennen: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Dieser wurde bereits benötigt, als man die Ableitung von sin(x) berechnet hat.